’n Veralgemeende Sylvester-Gallai Stelling*

A generalised Sylvester-Gallai Theorem

L.M. Pretorius
Departement Wiskunde en Toegepaste Wiskunde, Universiteit van Pretoria, Pretoria 0002
E-pos: lou.pretorius@up.ac.za
K.J. Swanepoel
Departement Wiskundige Wetenskappe, Universiteit van Suid-Afrika, Posbus 392, UNISA, Pretoria 0003

**Hierdie materiaal maak deel uit van werk wat deur die Nasionale Navorsingstigting ondersteun word onder Toekenning nr 2053752.*

Lou Pretorius (gebore 1945) is sedert 1967 ononderbroke verbonde aan die Departement Wiskunde en Toegepaste Wiskunde van die Universiteit van Pretoria. In 1972 verwerf hy daar die graad D.Sc. in wiskunde en word professor in die Departement Wiskunde en Toegepaste Wiskunde in die jaar 1991. Sy akademiese belangstelling het deur die jare verskuif van algebra na Ramseyteorie en is tans diskrete wiskunde.

Lou Pretorius (born 1945) has been attached to the Department of Mathematics and Applied Mathematics at the University of Pretoria since 1976. In 1972 he received the D.Sc. degree in mathematics and became professor in the Department of Mathematics and Applied Mathematics in 1991. During the past years his interest shifted from algebra to Ramsey theory and currently his interest is in discrete mathematics.

Konrad Swanepoel (gebore 1971) verwerf in 1997 die graad Ph.D. in wiskunde aan die Universiteit van Pretoria. Hy doseer eers aan die Universiteit van Pretoria en is sedert 2001 verbonde aan die Universiteit van Suid-Afrika. Sy hoofbelangstellings is diskrete en kombinatoriese meetkunde asook teoretiese aspekte van minimale netwerke.

Konrad Swanepoel (born 1971) received the Ph.D. degree in mathematics from the University of Pretoria in 1997. Initially he taught at the University of Pretoria and has been at the University of South Africa since 2001. His main interests are in discrete and combinatorial geometry as well as theoretical aspects of minimal networks.

ABSTRACT

A generalised Sylvester-Gallai Theorem

We give an algorithmic proof for the contrapositive of the following theorem that has recently been proved by the authors:

> Let $\mathcal{S}$ be a finite set of points in the plane, with each point coloured red, blue or with both colours. Suppose that for any two distinct points A and B in $\mathcal{S}$ sharing a colour k, there is a third point in $\mathcal{S}$ which has (inter alia) the colour different from k and is collinear with A and B. Then all the points in $\mathcal{S}$ are collinear.

This theorem is a generalization of both the Sylvester-Gallai Theorem and the Motzkin-Rabin Theorem.

UITTREKSEL

Ons gee 'n algoritmiese bewys vir die kontrapositief van die volgende stelling wat onlangs deur die outeurs bewys is:

> Laat $\mathcal{S}$ 'n eindige versameling van punte in die vlak wees, met elke punt rooi, blou of met beide kleure gekleur. Veronderstel dat daar vir enige twee verskillende punte A en B in $\mathcal{S}$ wat 'n kleur k deel, 'n derde punt in $\mathcal{S}$ is wat (o.a.) die kleur anders as k het en wat saamlynig met A en B is. Dan is al die punte in $\mathcal{S}$ saamlynig.

Hierdie stelling is 'n gemeenskaplike veralgemening van die Sylvester-Gallai Stelling en die Motzkin-Rabin Stelling.

1 DIE SYLVESTER-GALLAI EN DIE MOTZKIN-RABIN STELLINGS

Die derdegraadskromme $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0$ in die komplekse projektiewe vlak $P^2(\mathbb{C})$ het nege infleksiepunte wat in homogene koördinate deur die versameling

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\omega^3=1} \{(0, -1, \omega), (\omega, 0, -1), (-1, \omega, 0)\}$$

gegee word.[3]

Die punte in $\mathcal{S}$ het die eienskappe dat hulle nie-saamlynig is en dat 'n lyn deur enige twee van $\mathcal{S}$ se punte deur 'n derde punt van $\mathcal{S}$ gaan. James Sylvester[19] het in 1893 gevra vir 'n bewys dat daar nie 'n versameling punte met hierdie twee eienskappe in die reële projektiewe vlak $P^2(\mathbb{R})$ bestaan nie. Dit is nie duidelik of hy 'n bewys daarvoor gehad het nie. Dit was eers nadat Paul Erdős die vraag in 1933 herontdek het, dat Tibor Gallai die eerste bewys daarvoor gekry het.[8] Sy oplossing het egter eers in 1944 verskyn.[7,18]

SG Stelling. *Laat $\mathcal{S}$ 'n eindige versameling punte in die vlak wees. Veronderstel dat vir enige twee verskillende punte $A, B \in \mathcal{S}$ daar 'n derde punt in $\mathcal{S}$ is wat saamlynig met A en B is. Dan is al die punte in $\mathcal{S}$ saamlynig.*

Die vlak in die SG Stelling kan die reële affiene vlak $\mathbb{R}^2$ of die reële projektiewe vlak $P^2(\mathbb{R})$ wees.

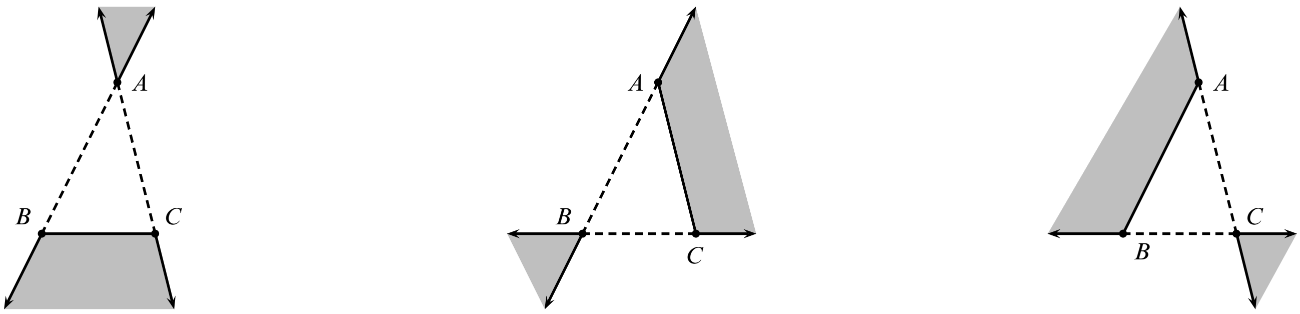
Die eerste gepubliseerde bewys (van die duale stelling) was die bewys van Melchior[14] en dit maak van Euler se poliëder-formule gebruik. Sedertdien het daar baie bewyse, uitbreidings en veralgemenings van die SG Stelling verskyn.[11,2,9] Die mees bekende bewys is waarskynlik Kelly s'n waarin hy die loodregte afstand tussen 'n punt $P \in \mathcal{S}$ en 'n lyn deur twee punte in $\mathcal{S} \setminus \{P\}$ gebruik. Die bewys het vir die eerste keer in 'n artikel van Coxeter verskyn.[5,1]

Een van die eenvoudigste bewyse van die SG Stelling is 'n bewys van Theodore Motzkin.[15] Hy het die duale stelling bewys: As 'n eindige versameling $\mathcal{S}$ van lyne in die projektiewe vlak die eienskap het dat vir enige twee verskillende lyne a en b in $\mathcal{S}$ 'n derde lyn in $\mathcal{S}$ bestaan wat deur die snypunt van a en b gaan, dan sny al die lyne in $\mathcal{S}$ in een punt. Motzkin het later sy bewys vir die duale SG Stelling met baie min aanpassings gebruik om die duaal van die volgende chromatiese weergawe te bewys.

MR Stelling. *Laat $\mathcal{S}$ 'n eindige versameling punte in die vlak wees, met elke punt rooi of blou gekleur. Veronderstel dat daar vir enige twee verskillende punte A en B in $\mathcal{S}$, met dieselfde kleur, 'n derde punt van die ander kleur in $\mathcal{S}$ bestaan wat saamlynig met A en B is. Dan is al die punte in $\mathcal{S}$ saamlynig.*

Weereens kan die vlak die reële affiene vlak $\mathbb{R}^2$ of die reële projektiewe vlak $P^2(\mathbb{R})$ wees. Michael Rabin het die stelling onafhanklik van Motzkin bewys en hulle was van plan om gesamentlik 'n bewys te publiseer. Dit het egter nooit gebeur nie. Ten minste twee artikels verwys na hierdie artikel.[4,10]

Motzkin se bewys kan in twee oorsigartikels[9,2] gevind word en maak van die begrip van oppervlakte gebruik. Die eerste gepubliseerde bewys is Chakerian[4,6] se bewys van die duale stelling en



Gebied A van ΔABC | Gebied B van ΔABC | Gebied C van ΔABC

Figuur 1: *Die gebiede van 'n driehoek*

maak van Euler se poliëder-formule gebruik. 'n Direkte bewys kan gegee word van die oorspronklike formulering hierbo in terme van punte.[16] Hierdie bewys maak verder ook net van Hilbert se insidensie- en tussenheidsaksiomas van elementêre meetkunde gebruik.[12]

Die feit dat Motzkin se bewyse vir die SG en MR Stellings omtrent identies is, suggereer een of ander verband tussen die stellings. Die volgende resultaat gee so 'n verband.[17]

Stelling 1. *Laat $\mathcal{S}$ 'n eindige versameling van punte in die vlak wees, met elke punt rooi, blou of met beide kleure gekleur. Veronderstel dat daar vir enige twee verskillende punte A en B in $\mathcal{S}$ wat 'n kleur k deel, 'n derde punt in $\mathcal{S}$ is wat (o.a.) die kleur anders as k het en wat saamlynig met A en B is. Dan is al die punte in $\mathcal{S}$ saamlynig.*

Ons sê 'n punt is *dubbelgekleur* indien dit met beide die kleure rooi en blou gekleur is. Dit is duidelik dat die MR Stelling 'n spesiale geval van Stelling 1 is. Die SG Stelling volg ook uit Stelling 1 deur elke punt in $\mathcal{S}$ dubbel te kleur.

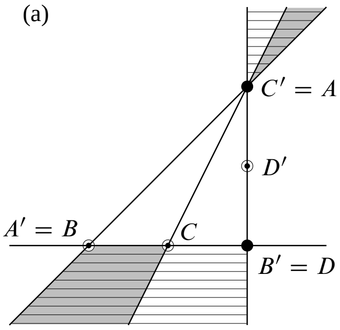
Die skrywers se oorspronklike bewys van Stelling 1 is in wese Motzkin se bewyse vir die duaal van die SG en die MR stellings in die reële projektiewe vlak.[17] In Afdeling 3 gee ons 'n direkte bewys van Stelling 1 sonder om te dualiseer. Alhoewel hierdie bewys verwant is aan die algoritmiese bewys van die MR stelling[16], is dit heelwat eenvoudiger.

2 DEFINISIES EN NOTASIE

Die bewys van Stelling 1 wat ons in Afdeling 3 gee, speel af in die reële affiene vlak $\mathbb{R}^2$. As A en B verskillende punte van die vlak is, dui ons met $\overline{AB}$ die lyn deur A en B aan. As A en C verskillende punte is en B is 'n punt tussen A en C, dan dui ons dit met $A * B * C$ of $C * B * A$ aan. Ons dui die driehoek met hoekpunte A, B en C met ΔABC aan en bedoel met die *gebiede* A, B en C van ΔABC die geslote gebiede aangedui in Figuur 1.

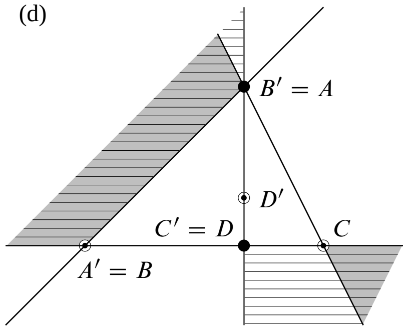
Laat $\mathcal{S}$ 'n eindige versameling punte in die vlak wees, met elke punt rooi, blou of dubbelgekleur. 'n Lyn van die vlak word *spesiaal* genoem as dit twee verskillende punte A en B van $\mathcal{S}$ bevat wat 'n kleur k deel, maar geen punt $C \in \overline{AB} \cap \mathcal{S}$, $C \neq A, B$, die kleur anders as k het nie. (Dit word egter toegelaat dat A of B die kleur anders as k mag hê.) As geen punt van $\mathcal{S}$ dubbelgekleur is nie, dan het 'n spesiale lyn slegs punte van een kleur. As al die punte van $\mathcal{S}$ egter dubbelgekleur is, dan het 'n spesiale lyn presies twee punte.

(a)



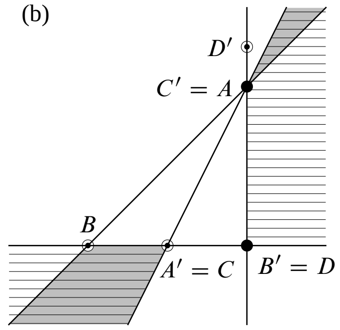
$B' * D' * C'$: Gebied C' bevat gebied A

(d)



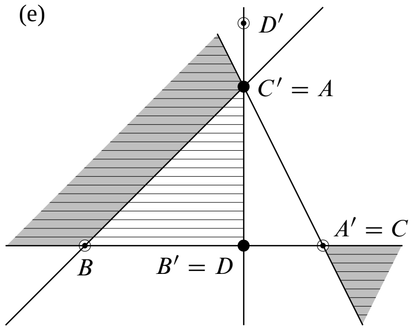
$B' * D' * C'$: Gebied C' bevat gebied C

(b)



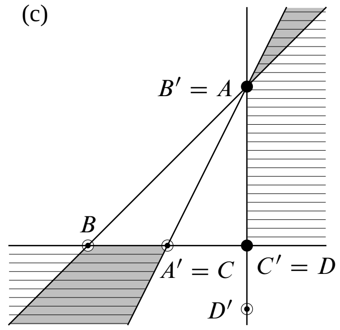
$B' * C' * D'$: Gebied A' bevat gebied A

(e)



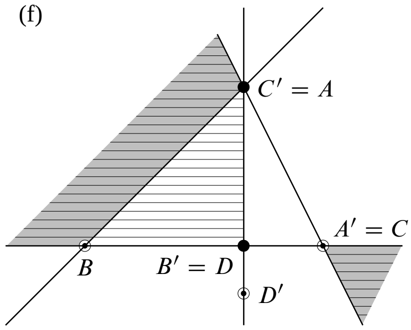
$B' * C' * D'$: Gebied A' bevat gebied C

(c)



$B' * D' * C'$: Gebied A' bevat gebied A

(f)



$B' * C' * D'$: Gebied A' bevat gebied C

Figuur 2: *Stap 11 van die Algoritme*

3 DIE BEWYS VAN STELLING 1

Ons gaan die kontrapositief van Stelling 1 bewys:

Stelling 1′ . *Laat $\mathcal{S}$ 'n eindige versameling punte in die vlak wees, met elke punt rooi, blou of dubbelgekleur. As die punte van $\mathcal{S}$ nie saamlynig is nie, dan bestaan daar 'n spesiale lyn.*

Die bewys van Stelling 1′ word gegee as die korrektheidsbewys van 'n algoritme wat met invoer 'n versameling punte $\mathcal{S}$ soos hierbo, 'n spesiale lyn as uitvoer gee.

3.1 Die Algoritme

1. **Invoer:** 'n Eindige nie-saamlynige versameling $\mathcal{S}$ van die vlak met elke punt van $\mathcal{S}$ rooi, blou of dubbelgekleur
2. **Uitvoer:** 'n Spesiale lyn
3. Vind twee punte B en C van $\mathcal{S}$ wat 'n kleur χ deel. Laat $\chi(B)$=χ en $\chi(C)$=χ.
4. *As* $\overline{BC}$ spesiaal is, *gee* $\overline{BC}$ *as uitvoer en stop*;
5. Laat $D \in \mathcal{S}$ 'n punt op $\overline{BC}$ wees met 'n kleur verskillend van $\chi(B)$ en laat $\chi(D)$ hierdie kleur wees;
6. *As* alle punte met kleur $\chi(D)$ op $\overline{BC}$ is, laat $A \in \mathcal{S}$ enige punt nie op $\overline{BC}$ wees en *gee* $\overline{AB}$ *as uitvoer en stop*;
7. Laat $A \in \mathcal{S}$ enige punt nie op $\overline{BC}$ wees, met 'n kleur $\chi(D)$ en laat $\chi(A)$:=$\chi(D)$;
8. *As* $C * B * D$ ruil B en C om.
9. *As* $B * C * D$, merk Gebied A van ΔABC;
10. *As* $B * D * C$, merk Gebied C van ΔABC;
11. *Terwyl* daar 'n punt $D' \in \mathcal{S}$ op $\overline{AD}$ is, verskillend van A en D en met 'n kleur verskillend van $\chi(A)$, laat $\chi(D')$ die kleur wees wat verskil van $\chi(A)$ en *doen*
    (a) *As* $B * C * D$ en $A * D' * D$, *dan* $C := A$, $A := B$, $B := D$, $D := D'$ en merk gebied C van ΔABC;
    (b) *As* $B * C * D$ en $D' * A * D$, *dan* ruil A en C om, $B := D$, $D := D'$ en merk gebied A van ΔABC;
    (c) *As* $B * C * D$ en $A * D * D'$, *dan* $B := A$, $A := C$, $C := D$, $D := D'$ en merk gebied A van ΔABC;
    (d) *As* $B * D * C$ en $A * D' * D$, *dan* ruil A en B om, $C := D$, $D := D'$ en merk gebied C van ΔABC;
    (e) *As* $B * D * C$ en $D' * A * D$, *dan* ruil A en C om, $B := D$, $D := D'$ en merk gebied A van ΔABC;
    (f) *As* $B * D * C$ en $A * D * D'$, *dan* $B := A$, $A := C$, $C := D$, $D := D'$ en merk gebied A van ΔABC;
12. *Uitvoer* $\overline{AD}$ en *stop*.

Figuur 2 illustreer stap 11. In die figuur word die punte A, B en C herbenoem tot A', B' en C' en D' bly D'. Die figuur weerspieël ook die χ-waardes van die punte.

3.2 Die korrektheidsbewys

Uit Figuur 2 is dit duidelik dat die gemerkte gebied groei met elke iterasie van die lus in stap 11. In die besonder is daar met elke stap nog 'n punt van $\mathcal{S}$ wat ingesluk word deur die gebied (D in Figuur 2). Verder is die volgende bewering 'n *lusinvariant*, d.w.s. dit is waar net voor stap 11 en ook na elke iterasie van die lus in stap 11:

$\overline{AD}$ en die gemerkte gebied het slegs punt A in gemeen.

Dit word ook maklik gesien uit Figuur 2. Dit volg dat die punt D' wat met elke iterasie op $\overline{AD}$ gevind word, altyd 'n nuwe punt uit $\mathcal{S}$ is. Omdat $\mathcal{S}$ eindig is, kan die lus nie onbeperk itereer nie en moet dit uiteindelik gebeur dat alle punte op $\overline{AD}$ anders as A en D slegs kleur $\chi(A)$ het. Die algoritme halt dan met die spesiale lyn $\overline{AD}$ as uitvoer.

Ons het die volgende bewys, wat ook Stelling 1 impliseer.

Stelling 2. *Die algoritme halt met 'n spesiale lyn as uitvoer.*

VERWYSINGS

1. Aigner, M., Ziegler, G. M. (2001). *Proofs from The Book, second ed.* (Berlin, Springer-Verlag).
2. Borwein, P., Moser, W. O. J. (1990). A survey of Sylvester's problem and its generalizations, *Aequationes Math.*, 40, 111–135.
3. Brieskorn, E., et al. (1987). *Plane Algebraic Curves* (Basel, Birkhäuser).
4. Chakerian, G. D. (1970). Sylvester's problem on collinear points and a relative, *Amer. Math. Monthly*, 77, 164–167.
5. Coxeter, H. S. M. (1948). A problem of collinear points, *Amer. Math. Monthly*, 55, 26–28.
6. Edmonds, J., Mandel, A. en Lovász, L. (1980). Solution to problem in number 4, p. 250, *Math. Intelligencer*, 2, 106–107.
7. Erdős, P. (1943). Problem 4065, *Amer. Math. Monthly*, 50, 65.
8. Erdős, P. (1982). Personal reminiscences and remarks on the mathematical work of Tibor Gallai, *Combinatorica*, 2, 207–212.
9. Erdős, P., Purdy, G. (1995). Extremal problems in combinatorial geometry. In Graham, R. L., Grötschel, M., Lovász, L. (eds.). *Handbook of combinatorics, Vol. 1* (Amsterdam, Elsevier) p. 809–874.
10. Grünbaum, B. (1999). Monochromatic intersection points in families of colored lines, *Geombinatorics*, 9, 3–9.
11. Grünbaum, B. (1972). Arrangements and spreads, *American Mathematical Society Providence, R.I., CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, 10.
12. Hartshorne, R. (2000). *Geometry: Euclid and beyond* (Springer).
13. Kleitman, D. J., Rothschild, B. L. (1972). A generalization of Kaplansky's game, *Discrete Math.*, 2, 173–178.
14. Melchior, E. (1941). Über Vielseite der projektiven Ebene, *Deutsche Math.*, 5, 461–475.
15. Motzkin, Th. (1951). The lines and planes connecting the points of a finite set, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 70, 451–464.
16. Pretorius, L. M., Swanepoel, K. J. (2004). An algorithmic proof of the Motzkin-Rabin theorem on monochrome lines, *Amer. Math. Monthly*, 111(3), 245–251.
17. Pretorius, L. M., Swanepoel, K. J. The Sylvester-Gallai Theorem, colourings and algebra, manuskrip. http://arxiv.org/math.CO/0606131
18. Steinberg, R. (1944). Solution to Problem 4065, *Amer. Math. Monthly*, 51, 169–171.
19. Sylvester, J. J. (1893). Mathematical question 11851, *Educational Times*, 59, 98–99.